

KAJIAN MENGENAI REPRESENTASI VISUALISTIK DAN KEMAMPUAN MENYELESAIKAN MASALAH MATEMATIKA

M. Rif'at

Dosen FKIP Universitas Tanjungpura Pontianak
mohamad_rifat@yahoo.com

Abstract: *This is an experimental research design, i.e. visualistic teaching and learning with two ways design. Due to two ways asymptotic significance and absolute extreme value obtained that visual competencies for sampel normally distributed and homogeny classified sampels, also no treatment effect among subjects. This research results explain that after the first visualistic treatment, there is no difference in visualizing problems, but significantly difference after the second and the third visualistic competencies. This research conclusions: (1) visual competencies are elements of chain of reasoning for achieving formal analytic competencies, (2) visual and analytic competency are parallel in solving mathematic problems, (3) vsual and analytic competency are not hierarchical, but in adequate relation, (4) solving visual-analytic problem always start from visual thinking, and then thinking analytically, (5) visual construction avtivities are mental process, i.e. abstraction of reflective of systematic visualization. This research come to suggest that: (1) teaching and learning mathematics show visual and algebra thinking activities, (2) mathematic content in teaching and learning show that visual competency is an integrated part of every study activity and not only developed for deeper content and formal analytic competency, but also oriented to visual analysis in developing creativity and ability thinking alternatively.*

Key Words: *analytic, manipulative, deduction, visualistic, visual teahing and leraning, intuition, abstraction, mathematic argument, illusion, visual analogy.*

Abstrak: Penelitian ini berbentuk eksperimen yakni pembelajaran visualistik dengan rancangan dua jalur. Berdasarkan nilai signifikansi asimtotis dua arah dan harga ekstrim mutlak didapat bahwa kemampuan visual sampel berdistribusi normal dan sebaran kelompok sampel adalah homogen, serta tidak terdapat efek berbaur antara subjek. Hasil penelitian menunjukkan bahwa setelah perlakuan visual pertama, kemampuan memvisualisasikan masalah tidak berbeda, tetapi setelah pembelajaran visual kedua dan ketiga, kemampuan tersebut berbeda secara signifikan. Simpulan penelitian adalah bahwa: (1) kemampuan visualistik merupakan komponen rantai penalaran dalam rangka mencapai kemampuan analitik formal, (2) kemampuan visual sejajar dengan kemampuan analitik dalam menyelesaikan masalah matematika, (3) kemampuan visual dan analitik tidaklah hirarkis, tetapi saling terkait, (4) penyelesaian masalah visualistik-analitik selalu bermula dari berpikir visual, kemudian diikuti dengan berpikir analitik, (5) kegiatan konstruksi visual merupakan proses mental, yakni abstraksi reflektif sistematis visualistik). Saran dari hasil penelitian ini: (1) pelaksanaan pembelajaran matematika menampakkan kegiatan berpikir visual dan aljabar, (2) materi pembelajaran memperlihatkan kajian visualistik sebagai bagian terpadu dalam setiap bahan kajian dan tidak hanya dikembangkan berorientasi isi dan kemampuan analitik formal, tetapi juga berorientasi pada kemampuan melakukan analisis visual yang menekankan kreatifitas dan berpikir alternatif.

Kata Kunci: representasi, analitik, manipulasi aljabar, deduksi visualistik, pembelajaran visualistik, intuisi, manipulasi gambar, abstraksi, argumen matematis, ilusi optik, sistematis visualistik, *analogi visual*.

Tadao (2000: 3) menyatakan bahwa selesaian masalah matematika yang bermula dari ilustrasi, masih perlu diteruskan ke tahap manipulatif dan linguistik sebelum mencapai tahap analitik. Pada tahap manipulatif, ilustrasi gambar perlu dimanipulasi sehingga diperoleh hubungan antargambar dan penggunaan prinsip atau dalil serta logika deduktif berjalan tanpa lompatan. Kemampuan memanipulasi merupakan kompetensi inti penting, karena sekurang-kurangnya ada dua kemampuan yang muncul, yaitu: (a) kemampuan memahami representasi visual dan (b) kemampuan menarik kesimpulan dari kegiatan memisualisasi situasi. Pada tahap linguistik, pemecah masalah memverbalisasikan manipulasi dari berbagai ilustrasi masalah atau mengilustrasikan hasil-hasil manipulasi.

Susanna (dalam Schoenfeld, 1994: 257-258) menyatakan bahwa tahapan visual dari intuisi dapat membangkitkan proses berpikir menjadi lebih baik bagi tahapan analitik. Kalau representasi visual dijadikan sebagai pendekatan, maka ia informal. Sebagai representasi informal, gambar tidak mesti terikat dengan suatu bentuk visual tertentu. Gambar yang dibuat sesuai situasi masalah biasanya diselesaikan secara analitik. Dalam keadaan demikian, gambar tidak mesti baik ataupun tepat dalam menggambarkan situasi masalah. Apabila gambar dimanipulasi, maka representasi tersebut harus dibuat tepat.

Pembelajaran matematika yang berkecenderungan pada representasi analitik, secara umum menampakkan dua jenis kesalahan, yaitu: (1) kesalahan menggunakan prosedur, konsep, dan prinsip dan (2) kesalahan menggunakan logika deduktif. Talyzina dan Brumfield (dalam Clements dan Battista, 1992: 438-445) dan Rif'at (1997: 72) menyatakan bahwa, peserta didik tidak memisahkan representasi analitik dengan visual, selalu mengabaikan kepentingan penalaran, sulit menyusun deduksi analitik, susunan deduksi masih merupakan gabungan antara representasi visual dengan manipulasi aljabar, dan kesulitan dalam bahasa dan logika. Representasi analitik yang disusun peserta didik belum menampakkan kemampuan formal secara *holistik*, yakni logika bernalar dalam susunan

analitik yang dibuat belum benar dan representasi analitik masih disertai gambar. Ruseffendi (1991: 102) menyatakan bahwa, masih ada orang yang belum dapat mencapai tahap berpikir analitik bahkan sampai kuliah. Dilaporkan juga oleh O'Daffer dan Thornquist (dalam Wilson, 1993: 50-51); dan Clements, Battista, dan Brumfield (dalam Grouws, 1992: 438-439) dari penelitian yang dilakukan Senk dan William, bahwa: (1) 25% dari 1520 siswa SMU tidak mampu berdeduksi secara analitik dan (2) 20% dari 255 siswa hanya berdeduksi secara *ilustratif*. Senk menyatakan bahwa, walaupun siswa telah diajar menyusun deduksi secara analitik, hanya 30% dari mereka dengan angka penguasaan 75%, serta hanya antara 20% hingga 30% dari siswa yang mempunyai pemahaman dasar dalam menyusun deduksi secara analitik.

Representasi visual dalam pembelajaran matematika memang penting. Vinner (dalam Tall, 1992: 507), menyatakan bahwa deduksi dari representasi visual lebih meyakinkan peserta didik daripada susunan analitik, dan kecenderungan peserta didik memilih atau mengembangkan susunan analitik tidak menunjukkan peningkatan pemahaman aljabar, tetapi karena kebiasaan, rutinitas, dan menyenangkan. Dalam beberapa kajian yang dilakukan Begle (1979: 128) menunjukkan bahwa tuntutan akan representasi analitik tidak menjadi indikator kemampuan dari representasi matematika. Karena itu, meskipun peserta didik belum berkecenderungan menuliskan deduksi berdasarkan aturan yang berlaku dalam objek visual dan memanipulasinya, kepentingan gambar dalam rangka berpikir (*visual-thinking*) menjadi penting. Seperti dinyatakan oleh Clairaut (dalam Barbin, 1993: 73) bahwa, deduksi dari gambar dengan cara memanipulasinya memungkinkan orang yang belajar mengetahui proses bagaimana mengetahui.

Kepentingan pembelajaran visualistik bukan sekedar suatu variasi representasi, tetapi juga berkenaan dengan kemampuan. Galindo (1995: 324) menyatakan bahwa, metode selesaian yang digunakan peserta didik selama wawancara berbasis tugas mencerminkan orientasi visual. Ia juga menyatakan bahwa mahasiswa yang memperoleh skor tinggi cenderung menggunakan metode

selesaian visual, sedangkan mahasiswa dengan skor rendah menggunakan metode selesaian analitik, yaitu secara numerik dan simbolik. Hasil penelitian dalam bidang psikologi kognitif juga menunjukkan keutamaan proses dan kegiatan visual daripada jenis proses dan kegiatan otak yang lain. Matlin (1994: 173-210), misalnya menuliskan beberapa hasil penelitian berkenaan dengan kegiatan dan proses visual, yakni: (a) kesan visual berhubungan dengan latihan visual, implementasi pengembangan pembelajaran matematika adalah memperbanyak deduksi visualistik, (b) representasi visual dalam pikiran ada yang berkode analog, ada pula proposisional, yang bersesuaian pula dengan pendapat Gagne (1984: 49) bahwa pengkodean analog menyediakan pembelajaran matematika yang visualistik, dan (c) stimuli visual dapat, bahkan mudah diperiksa dan diinterpretasi kembali, sebagaimana pula dinyatakan oleh Syer (dalam Suwarsono, 1998: 9) yakni apabila kembali kepada perumusan dari suatu konsep yang analitik, maka dapat diamati bahwa landasan pengembangan konsep itu berbasis perseptual (visualistik).

PERMASALAHAN

Kevisualan dalam pembelajaran matematika selama ini masih dijadikan sebagai alat bantu yang bersifat *diskrit* terhadap kemampuan analitik dalam keseluruhan kegiatan kognisi serta belum dipandang sebagai cara atau pola berpikir tersendiri. Segi kevisualan masih merupakan tugas menggambar atau memvisualisasikan masalah saja. Keterkaitan antara representasi visual yang dibuat dengan selesaian masalah yang diminta merupakan dua aspek yang dipisahkan. Selain itu, aspek visual yang muncul dalam deduksi tidak diturunkan dengan memanipulasi gambar, tetapi hanya melakukan manipulasi aljabar menurut aturan yang berlaku pada gambar. Peserta didik mengamati gambar, kemudian menurunkan berbagai hubungan analitik yang berlaku. Selesaian demikian, dalam penelitian ini dinamakan selesaian analitik atau numerik atau simbolik atau formal (Mikio, 2000: 9; Tsamir dan Mandel, 2000: 23).

Dalam pembelajaran matematika selama ini, penerapan konsep sangat menonjol dan penerapannya mengutamakan aturan logika deduktif. Deduksi dari representasi analitik yang berbasis pada kemampuan manipulasi simbol kadangkala menunjukkan bahwa pemahaman matematika kurang tepat atau keliru. Kajian kevisualan dalam pembelajaran matematika belum menjadikan gambar sebagai objek yang manipulatif. Selama ini manipulasi hanya dilakukan pada representasi numerik dan simbol termasuk representasi buku ajar matematika perguruan tinggi (O'Shea, 1993: 17). Rif'at (1997: 70-71) menyatakan bahwa, kekuatan manipulasi pada representasi analitik yang dilakukan mahasiswa ternyata menyulitkan mereka dalam menarik kesimpulan.

Selain sebagai alat bantu, ciri visual lain yang muncul dalam deduksi tidak diturunkan dengan cara memanipulasi gambar atau representasi visual, tetapi cenderung melakukan manipulasi pada representasi analitik berdasarkan gambar yang dibuat. Kesalahan dalam memutuskan visualisasi suatu masalah dinamakan sebagai *oblique effect*, yaitu kesalahan yang disebabkan oleh pengaruh persepsi terhadap proses dan kegiatan visual (Matlin, 1994: 38). Adanya pengaruh tersebut juga dijelaskan oleh Kosslyn (dalam Matlin, 1994: 191) yaitu bahwa, apabila orang telah membayangkan pola visual pada posisi tertentu untuk waktu lama, maka lebih sulit bagi mereka membayangkan pola visual baru atau lain pada posisi yang sama.

Kemampuan mengkonstruksi gambar dari suatu representasi analitik secara umum juga belum biasa dilakukan dalam pembelajaran, misalnya tampak pada kecenderungan memunculkan representasi analitik pada representasi visual, yaitu pembelajar menyusun hubungan analitik dari gambar. Salah satu cara mengatasi kesulitan tersebut adalah dengan cara mencoba mengkonstruksi gambar dari suatu representasi analitik, kemudian selesaian atas masalah dilakukan dengan cara memanipulasi gambarnya.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini adalah eksperimen hanya postes pada tiga kelompok homogen, yang masing-masing diberikan tiga perlakuan pembelajaran deduksi visualistik yang berbeda. Populasi penelitian adalah mahasiswa jurusan pendidikan matematika FKIP Untan Pontianak Tahun Akademik 2012/2013. Pengujian sebaran populasi dilakukan dari hasil tes uji coba subjek dan dilakukan dua kali dari, yaitu pada: (a) 20 mahasiswa yang telah menyelesaikan perkuliahan dan sedang menjalani proses bimbingan penulisan makalah seminar dan (b) 20 mahasiswa yang masih mengikuti perkuliahan. Pengambilan subjek populasi dilakukan secara acak dengan strata. Subjek populasi telah menyelesaikan semua mata kuliah dan sedang mempersiapkan seminar usulan penelitian. Pengambilan secara acak dengan strata dari subjek populasi yang masih berkuliah, yaitu menurut semester (yaitu 1, 3, 5, dan 7), 5 orang dari setiap strata dari masing-masing banyak mahasiswa.

Hasil tes satu kelompok subjek populasi dianalisis menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov. Nilai signifikansi asimtotis dua arah adalah 0,53 dan harga ekstrim mutlakanya sama dengan 0,13. Dalam penelitian ini ditetapkan bahwa $\alpha = 1\%$ atau 5% , yang berarti lebih kecil dari 0,53. Dengan demikian hipotesis nol yang menyatakan bahwa kemampuan visual pada subjek sampel berdistribusi normal diterima. Dengan menggunakan harga ekstrim mutlak, hipotesis nol tersebut juga diterima, karena untuk $n = 40$ dan $\alpha = 5\%$, nilai pada tabel adalah 0,21, dan untuk $\alpha = 1\%$, nilai pada tabel adalah 0,25 untuk pengujian dua arah.

Pengujian sebaran populasi berdasarkan Plot Probabilitas Normal. Jenis uji yang digunakan adalah Uji Liliefors yang didasarkan perbaikan dari Uji Smirnov-Kolmogorov (KS) dan Uji Shapiro-Wilk (SW). Karena taraf signifikansi yang ditetapkan dalam penelitian ini, yaitu 1% dan 5% adalah lebih kecil daripada signifikansi untuk kedua macam uji statistik yang digunakan, maka hipotesis nol diterima. Penerimaan hipotesis kerja tersebut juga sesuai dengan harga statistik, yakni nilai hitung untuk kedua macam uji tersebut lebih kecil daripada nilai pada Tabel Uji Liliefors untuk kenormalan dan

Tabel Nilai Kritis untuk Statistik U Wilcoxon-Mann-Whitney pada pengujian dua arah. Dalam hal ini, nilai pada kedua tabel masing-masing adalah 0,19 dan 0,71. Dengan demikian, subjek sampel berasal dari populasi yang normal. Tabel yang digunakan adalah dari Sprent (1991: 280-282). Pengujian sebaran populasi dihitung dalam rangka validitas internal, yaitu: (1) efek perbedaan lama berkuliah dan (2) efek berbaurnya kelompok uji coba dan percobaan. Setelah dihitung didapat bahwa sebaran populasi menurut semester adalah homogen. Nilai signifikansi pada tabel lebih besar daripada taraf signifikansi penelitian yang ditetapkan, yaitu 1% dan 5% . Dengan demikian, kemampuan visual populasi tidak berpengaruh karena perbedaan semester. Karena sebaran subjek populasi dilihat dari skor tes menurut faktor semester adalah homogen serta ditarik dari populasi yang bersebaran normal maka, ada tidaknya efek berbaur pada kedua kelompok diuji dengan Uji-t.

Nilai t hitung = 0,09 adalah lebih kecil daripada nilai t tabel untuk taraf signifikansi 5% maupun 1% , yang masing-masing sama dengan 2,36 dan 1,66. Dengan demikian, tidak terdapat efek berbaur antara subjek yang telah menyelesaikan kuliah dengan yang sedang berkuliah. Artinya, validitas internal tidak rusak karena perbedaan semester perkuliahan, dan berbaurnya kelompok uji coba dan percobaan. Banyak subjek sampel percobaan dihitung berdasarkan taksiran parameter simpangan baku σ dari data skor kemampuan visual subjek populasi, yaitu $\sigma = 8,44$. Rentang rata-rata populasi μ dihitung dengan koefisien kepercayaan $\gamma = 0,99$ (Sudjana, 1986: 196), diperoleh bahwa μ terletak antara 23,29 dan 30,14, dan ditetapkan bahwa $\mu = 29$, dan diambil $n = 40$. Teknik pengambilan sampel dari populasi penelitian adalah acak terbatas berjenis banyak tingkat (Kartono, 1976: 161-162) atau pemilihan sampel bertahap (Ruseffendi, 1994: 88). Subjek sampel yang terpilih sesuai dengan nomor mereka pada daftar hadir yang keluar dari pengocokan.

Pengumpulan data melalui tes tertulis bentuk uraian, dimana instrumen untuk tes tersebut divalidasi isi dan wajah. Validitas isi ditimbang oleh 5 ahli untuk 8 butir soal sebelum diujicobakan, yaitu

dari dosen matematika pada Jurusan Pendidikan Matematika FKIP Universitas Tanjungpura. Analisis menggunakan statistik Uji Q-Cochran. Uji tersebut digunakan dalam rangka menguji apakah para penimbang menimbang instrumen secara sama atau tidak. Signifikansi asimtotis 0,00 adalah terlalu kecil dibandingkan dengan taraf signifikansi $\alpha = 5\%$ atau 1% . Harga statistik Q yang diperoleh, yakni 28,47. Angka tersebut lebih besar daripada harga-harga pada Tabel Kai-kuadrat untuk $\alpha = 5\%$ atau 1% . Dengan derajat kebebasan 7, dari tabel harga-harga kritis kai-kuadrat masing-masing diperoleh nilai 14,07 dan 18,48. Simpulannya adalah bahwa kemungkinan menimbang kevalidan suatu instrumen adalah tidak sama bagi kelima penimbang. Berdasarkan hasil timbangan ahli, peneliti menetapkan bahwa soal nomor 6 dan 8 dibuang.

Validitas wajah dianalisis berdasarkan kemunculan tiga pola visual pada 6 butir soal yang valid. Kevalidan wajah dari keenam butir soal ditentukan menggunakan ukuran kecenderungan kemunculan pola-pola visual pada setiap soal. Uji kecenderungan tersebut dihitung menggunakan Uji Kai-kuadrat (Stockton dan Clark, 1980: 102). Nilai kai-kuadrat butir nomor 1 hingga 6 masing-masing $\chi^2 = 10,00$, $\chi^2 = 4,90$, $\chi^2 = 4,90$, $\chi^2 = 6,40$, $\chi^2 = 4,90$, dan $\chi^2 = 4,90$ dengan taraf signifikansi berturut-turut adalah 0,00; 0,03; 0,03; 0,01; 0,03; dan 0,03. Harga χ^2 tabel untuk $\alpha = 1\%$ dan 5% , dengan dk = 1, masing-masing adalah $\chi^2_{0,88(1)} = 6,63$ dan $\chi^2_{0,95(1)} = 3,81$. Dengan demikian dugaan bahwa peluang muncul tidaknya pola visual untuk setiap soal adalah sama dapat ditolak, yang berarti bahwa pola visual pada masing-masing butir soal berkecenderungan muncul, yaitu butir nomor 1 berpeluang kemunculan pola visualnya adalah 0,75; butir nomor 2, 3, 5, dan 6 berpeluang 0,68; dan butir nomor 4 berpeluang 0,70 untuk kemunculan pola visualnya. Derajat hubungan antara muncul dan tidaknya pola visual pada setiap butir soal juga tinggi, karena koefisien kontingensi untuk setiap butir soal mendekati koefisien kontingensi maksimum (Sudjana, 1986: 279), yaitu $C = 0,71$. Dalam hal ini, koefisien kontingensi butir nomor 1 adalah 0,45; butir nomor 2, 3, 5, dan 6 berkoefisien kontingensi sama dengan 0,33, dan harga C untuk butir nomor 4 sama dengan 0,37.

Karena probabilitas kemunculan pola visual lebih tinggi daripada probabilitas tidak munculnya pola visual tersebut dan koefisien kontingensi setiap butir soal mendekati koefisien kontingensi maksimum, maka kemunculan pola visual sangat berkaitan dengan ketidakhadiran pola tersebut. Dengan demikian, validitas wajah instrumen penelitian adalah tinggi atau butir soal dapat mengukur kemampuan visual subjek penelitian.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil

Sebelum perlakuan, representasi visual 1 belum digunakan dalam menyelesaikan masalah matematika. Walaupun ada perbedaan dengan setelah perlakuan, masih ada subjek yang belum menggunakan representasi visual 1 dalam menyelesaikan masalah. Kinerja demikian tampak pada berbagai representasi visual yang kurang tepat, belum memperhatikan bantuan sistem koordinat dengan benar, dan memvisualkan situasi masalah yang tidak sesuai dengan makna dari konsep-konsep geometri. Representasi visual dinyatakan kurang tepat, karena kesalahan visual yang dibuat bersifat *sistematis visualistik*, yakni bahwa representasi visual tersebut terkait dengan ciri visual lain yang telah dikenal.

Kemampuan visual belum muncul secara holistik. Jawaban yang disusun tidak diturunkan dari visualisasi secara benar, sehingga subjek mengalami kesulitan mendapatkan penyelesaian. Dari hasil kerja 10 subjek, ditemukan 4 orang menggambarkan garis tinggi di luar piramida, 2 subjek tidak meletakkan titik potong garis tinggi piramida secara tepat pada bidang alas, 2 subjek tidak menunjukkan bahwa titik potong garis tinggi piramida dengan bidang alas adalah ditengah-tengah diagonal bidang alas tersebut, dan semua subjek tidak mendapatkan segitiga-segitiga yang sebangun dalam rangka menemukan jawaban. Urutan pengkajian matematika berawal dari penanaman konsep dengan titik berat pada kemampuan menganalisis masalah serta menerapkan aturan pada sistem aksiomatik. Hasil penelitian ini sesuai dengan temuan Mundy dan Lauten (1994, hal. 21) yang menyatakan bahwa pembelajaran

matematika berkecenderungan pada peningkatan kemampuan representasi analitik daripada representasi visual.

Rif'at (1997, hal 98), menemukan bahwa mahasiswa cenderung melakukan manipulasi dari representasi analitik dengan menggunakan kasus numerik dan memanipulasi simbol dengan menggunakan logika deduktif. Dalam hal ini, selesai oleh subjek tanpa memperhatikan gambar. Representasi analitik selalu muncul dalam menyelesaikan masalah sehingga kosong makna. Dalam situasi tersebut, subjek mengalami kesulitan dalam membuat hubungan dan memberi arti pada representasi analitik. Temuan ini analog dengan temuan Mundy (1985, hal. 21) bahwa mahasiswa masih memisahkan representasi analitik dengan visual sehingga representasi tersebut seringkali salah makna. Ditemukan pula bahwa sebagian besar subjek belum dapat mengaitkan representasi analitik dengan suatu representasi visual yang sesuai atau mereka belum dapat menghubungkan representasi analitik tersebut dengan menggunakan representasi visual.

Kemampuan visual mahasiswa berbeda secara signifikan menurut pembelajaran visualistik (*pola-pola visual*). Dalam hal ini, nilai F hitung sama dengan 268,43 lebih besar daripada nilai tabel distribusi $F_{(2,120)}$ untuk taraf signifikansi 1 dan 5%, yaitu masing-masing asalah 4,79 dan 3,07. Skor kemampuan visual setelah perlakuan kemampuan visual 3 lebih baik dibandingkan dengan skor tersebut setelah pembelajaran kemampuan visual 2 dan 1. Dan, skor kemampuan visual adalah lebih baik setelah pembelajaran kemampuan visual 2 dibandingkan dengan setelah pembelajaran kemampuan visual 1. Kemampuan visual mahasiswa berbeda signifikan pada taraf signifikansi 5%, tetapi tidak berbeda secara signifikan pada taraf keartian 1%, dilihat dari semester perkuliahan. Kemampuan visual mahasiswa berbeda secara signifikan pada taraf signifikansi 5%, tetapi tidak berbeda pada taraf 1%, apabila dilihat dari efek interaksi antara perlakuan pola-pola visual dengan semester perkuliahan mereka. Kemampuan visual setelah pembelajaran pola visual 3 lebih baik daripada setelah pembelajaran pola visual 2, dan kemampuan

visual setelah pola visual 2 lebih baik daripada setelah pembelajaran pola visual 1. Kemampuan visual mahasiswa berbeda secara signifikan dilihat dari interaksi antara perlakuan pola-pola visual dan semester perkuliahan.

Berdasarkan permutasi dua taraf pada faktor pola pembelajaran visual menunjukkan bahwa, terdapat perbedaan kemampuan visual yang bearti antara setiap dua taraf pada faktor pola pembelajaran visual. Kemampuan visual setelah pembelajaran pola visual 3 lebih baik daripada kemampuan visual setelah pembelajaran pola visual 1 dan 2, dan kemampuan visual setelah pembelajaran pola visual 2 lebih baik daripada setelah pembelajaran pola visual 1. Permutasi antara dua taraf pada faktor semester perkuliahan menunjukkan bahwa, tidak terdapat perbedaan kemampuan visual antara setiap dua taraf pada faktor tersebut. Rerata skor kemampuan visual mahasiswa semester 1 lebih tinggi daripada rerata skor mahasiswa semester tersebut. Rerata skor kemampuan visual mahasiswa semester 3 lebih besar daripada rerata skor mahasiswa ketiga semester lainnya. Dan, rerata skor kemampuan visual mahasiswa semester 7 lebih kecil daripada rerata skor mahasiswa semester lainnya.

Tidak terdapat hubungan antara jenis kesalahan dengan pola pembelajaran dan semester perkuliahan. Derajat hubungan antara faktor pola pembelajaran visual dan semester perkuliahan menurut masing-masing jenis kesalahan adalah tinggi. Hal ini bearti bahwa tidak adanya hubungan antara faktor tersebut memang kuat. Sebagai contoh, jenis kesalahan 4 mempunyai koefisien kontingensi $0,569 = 0,57$, dan koefisien kontingensi maksimumnya adalah 0,82. Hal ini bearti bahwa faktor pola pembelajaran visual makin tidak berkaitan dengan semester perkuliahan dilihat dari jenis kesalahan. Dengan menggunakan Model Weiner, banyak subjek pada setiap jenis kesalahan dilihat pula dari pola pembelajaran dan semester perkuliahan diperoleh hasil bahwa: (a) kesalahan subjek yang mendapatkan Pola Pembelajaran Visual 1 lebih banyak muncul, terutama pada mahasiswa semester 5 dan 7 daripada semester 1 dan 3, (b) kesalahan yang terjadi setelah pembelajaran Pola Visual 1 dan 2 juga muncul, tetapi setelah Pola Pembelajaran Visual 2 hanya seorang

yang melakukan kesalahan tersebut, yaitu subjek semester 7, (c) setelah Pembelajaran Pola Visual 1, banyak subjek yang melakukan kesalahan hampir sama menurut semester perkuliahan mereka, (d) kesalahan yang muncul setelah Pembelajaran Pola Visual 3 lebih sedikit dibandingkan dengan jenis kesalahan setelah Pola Pembelajaran Visual 1 dan 2. Kesalahan dikarenakan bahwa representasi visual dijadikan sebagai alat bantu dalam menyelesaikan masalah masih menjadi faktor yang resinten.

Resistensi mengenai peran representasi visual sebagai alat bantu bahkan telah menjadi *belief* dalam rangka selesaian masalah. Setelah memvisualisasikan masalah, subjek tidak menggunakannya lagi. Akan tetapi, walaupun peserta didik menggunakan rumus secara benar dan dapat digunakan, masih tampak kesulitan menyusun selesaian karena hubungan antar ekspresi matematis tidak mudah ditemukan. Namun, apabila representasi visual dilengkapi dan/atau dimanipulasi, suatu masalah akan tampak lebih mudah diselesaikan. Walaupun mungkin memerlukan waktu lebih lama, rantai berpikir tidak terputus sebagaimana penggunaan representasi analitik.

Jenis kesalahan paling menonjol pada representasi analitik, yaitu bahwa, subjek lebih suka memanipulasi simbol dalam rangka mendapatkan hubungan-hubungan sehingga selesaian dapat disusun. Namun, suatu selesaian secara umum tidak *rigor* dilihat dari hakekat matematika. Suatu selesaian yang disusun subjek mengandalkan manipulasi aljabar atau simbol berujung pada kesimpulan perseptual berdasarkan kepercayaan subjek. Jenis kesalahan lain adalah tidak tepat memvisualisasikan masalah sehingga menyulitkan subjek dalam membuat analisis dari representasi visual. Persepsi subjek pada representasi visual terganggu sehingga mereka tidak dapat menggunakannya dalam menyelesaikan masalah. Dalam keadaan demikian, mereka tidak dapat melihat hubungan visual dengan makna analitik. Dalam literatur pendidikan matematika, kejadian seperti itu dinamakan sebagai terputusnya konsep analitik (Mundy, 1985: 37).

Kesalahan juga nampak karena subjek tidak konsisten dalam menggunakan aturan. Temuan ini

merupakan fakta bahwa, representasi visual sangat menonjol digunakan sebagai alat bantu. Kesalahan yang juga direkam peneliti adalah bahwa subjek tidak menggunakan representasi visual yang telah mereka manipulasi. Dari representasi visual yang dikonstruksi, disusun selesaian analitik. Dalam keadaan demikian, terjadi kesalahan dalam membuat hubungan-hubungan analitik. Akan tetapi, situasi soal yang divisualisasikan dengan benar mengantar kepada kemampuan kecermatan dan konsistensi berpikir mahasiswa. Subjek yang menjawab salah dikarenakan mereka tidak memahami hubungan antara representasi visual yang bersesuaian. Kesalahan dalam menyelesaikan soal dipahami peneliti sebagai suatu kekeliruan memahami hubungan antara representasi analitik dengan representasi visual.

Hasil-hasil penelitian lain yang berkenaan dengan matematika visualistik menunjukkan hal yang sama, yakni bahwa subjek hanya berkecenderungan menyusun jawaban secara formal atau kasuistik. Pembelajar masih berpikir intuitif, argumentasi mereka adalah fomal dan berdasarkan kasus, yakni menunjukkan kebenaran dengan menggunakan contoh-contoh numerik, dan bahkan hal tersebut terjadi tidak hanya pada anak dengan level matematika lebih rendah, tetapi muncul juga pada anak berlevel akademik mayor dalam matematika. Setelah pembelajaran, ada perubahan berarti, yakni: (a) subjek memperhatikan ketepatan gambar yang mereka konstruksi dari situasi serta menggunakannya dalam menyelesaikan masalah dan (b) muncul representasi-representasi visual yang beragam karena subjek melakukan manipulasi pada representasi visual dan muncul pula kemampuan menggunakan fakta-fakta visual yang diberikan.

Pembahasan

Visualisasi masalah menunjukkan konsistensi subjek dalam menetapkan suatu bentuk geometri tertentu, meskipun tanpa memperhatikan kebenaran visualisasi dari ekspresi masalah. Subjek mengetahui masalah dalam soal, mereka berpikir sesuai dengan situasi soal, tetapi subjek belum mengerti tentang konsep pada bangun datar. Schoenfeld (1985: 136) menyatakan bahwa pemahaman seseorang seringkali

terhadap ciri tak formal berkaitan dengan intuisi mengenai ciri objek dalam suatu ranah tertentu. Intuisi seperti itu juga mendasari kemampuan formal yang merupakan objek abstrak dari matematika.

Kesalahan sistematis visualistik terjadi dikarenakan salah memahami representasi visual. Representasi visual belum dijadikan sebagai sumber dalam rangka menumbuhkan kemampuan melihat kesesuaian-kesesuaian dengan situasi soal. Ketidaktepatan memvisualisasi situasi soal mungkin pula berhubungan dengan kemampuan visual subjek yang kurang, karena menurut Simon (1979: 39), orang yang mempunyai kemampuan visual lebih baik akan mampu menghasilkan kembali ketepatan representasi sehingga mereka dapat menyelesaikan masalah.

Susunan representasi visual yang secara bertahap dikonstruksi atau pengetahuan visual yang dimiliki subjek mengganggu persepsi mereka sehingga hasilnya disesuaikan atau dipahami dalam rangka mendapatkan bentuk visual tertentu yang dikenal, yakni segitiga. Temuan ini sesuai dengan hasil penelitian de Groot (1965: 38) bahwa pada tugas-tugas berciri visualistik, pengetahuan seseorang dapat mengganggu persepsinya sehingga orang itu menghasilkan sesuatu yang mereka harapkan dapat dipahami dari keadaan yang ditunjukkan. Dengan demikian, kemampuan visual belum menjadi sumber keahlian dalam menyelesaikan soal-soal matematika, terutama yang berciri visual.

Persepsi visual seseorang terganggu oleh pengetahuan terdahulu, yang kemudian menimbulkan kesalahan sistematis visualistik ternyata terkait juga dengan susunan jawaban benar. Walaupun jawaban subjek benar, kerja matematika masih lebih banyak coba-coba. Pengerjaan demikian, apabila dihubungkan dengan pendapat Simon (1980: 13) dapat dikatakan bahwa subjek memiliki suatu susunan persepsi visual yang diarahkan kepada yang dikenal atau dapat dikenali. Susunan persepsi visual yang dikenal oleh seseorang kemudian menghasilkan tanggapan visualistik sebagai reaksi terhadap persepsinya. Dengan demikian, sebagaimana dinyatakan oleh Schoenfeld (1985: 34), bahwa tanggapan yang dihasilkan seseorang tidak khusus

terhadap situasi yang ada, tetapi cenderung pada jenis yang digambarkan.

Dari segi kemampuan visual, pekerjaan peserta didik masih menunjukkan peranan persepsi yang ditanggapi secara tidak khusus terhadap situasi yang divisualkan. Subjek belum mempunyai *skema visual* yang memungkinkan mereka menggunakannya secara efektif atau efisien dalam menyelesaikan masalah, terutama yang berciri visual. Kinerja subjek seringkali membawa kearah selesaian yang salah. Kinerja subjek demikian sesuai dengan yang dinyatakan Hinsley, Hayes, dan Simon (1977: 17), yakni bahwa orang yang menyelesaikan masalah matematika, secara umum: (a) mengkategorisasikan pengalaman ke dalam jenis-jenis, (b) cenderung mengelompokkan pengalaman baru secara konsisten dengan ciri sebelumnya-bahkan seringkali pengalaman baru tersebut belum dianalisis, (c) mempunyai skema keterangan mengenai ciri pengalaman yang secara potensial bermanfaat dalam menyelesaikan masalah baru, yakni dengan cara membuat kerangka berdasarkan pengalaman terdahulu, dan (d) menggunakan pengetahuan berciri yang dimiliki dalam rangka menafsirkan masalah baru, yang kadang-kadang tidak tepat apabila digunakan dalam menyelesaikan masalah.

Dalam penelitian ini ditemukan pula bahwa masih banyak subjek yang menyelesaikan soal berciri visual dengan mengutamakan persepsi, misalnya subjek menyatakan bahwa panjang suatu ruas garis tertentu adalah sama dengan panjang ruas garis lain. Schoenfeld (1985: 18) menyatakan bahwa pada tingkatan persepsi visual seseorang menggambarkan alasan mereka berdasarkan *ilusi optikal*. Dengan demikian, masih ada mahasiswa yang berada pada tingkatan persepsi visual. Karena itu, pembelajaran matematika yang disajikan secara formal dapat membuat perbedaan besar antara potensi seseorang dengan kemampuannya. Hal ini dapat terjadi karena tingkatan berpikir orang itu masih perseptual visualistik.

Hasil kerja subjek masih mengutamakan kekuatan melakukan manipulasi simbolik daripada kejelasan fakta dan representasi visual, yakni selesaian disempurnakan menggunakan representasi analitik dengan melakukan manipulasi aljabar.

Subjek menyusun selesaian menggunakan representasi simbolik atau analitik, tetapi menggunakan fakta visual yang disimpulkan secara perseptual. Mereka menyusun selesaian secara analitik dengan cara menggunakan rumus matematika. Subjek mengubah fakta visual menjadi khusus, dan memanipulasi visual dilakukan berdasarkan keyakinan. Jenis susunan penyelesaian tersebut masih menunjukkan konsistensi taraf berpikir dari subjek, yakni perseptual visual. Kekuatan manipulasi analitik mempengaruhi kelengkapan persepsi visual subjek. Hal ini menunjukkan bahwa representasi visual belum dikaitkan dengan representasi analitik atau antara satu cara penyajian dengan cara penyajian lain tidak berperan bersamaan dalam menyelesaikan masalah. Dengan demikian subjek sulit atau tidak dapat mengkonstruksi pengetahuan matematika oleh mereka sendiri. Padahal, menurut Tadao (2000: 5), sewaktu pembelajar mengkonstruksi pengetahuan matematika, lima cara representasi, yakni realistik, manipulatif, ilustratif, linguistik, dan simbolik memainkan peran penting.

Jenis selesaian masalah oleh subjek masih menampakkan kesalahan konsep, dikaji dari pandangan Bell (1978: 78), yakni ada tiga jenis konsep matematika, yaitu: (a) konsep matematika murni, (b) konsep matematika notasional, dan (c) konsep matematika terapan. eliti menamakannya sebagai suatu bentuk kesalahan *analogi visual*, yakni suatu jenis kesalahan dikarenakan subjek melihat kesamaan bentuk visual. Penamaan tersebut dilandasi pendapat bahwa selesaian visualistik merupakan suatu strategi (Suwarsono, 1998: 14), dan analogi merupakan satu dari empat strategi dasar dalam pembelajaran konsep (Seng, 1979: 37). Tiga strategi dasar lagi adalah *perwatakan*, *percontohan*, dan *persimbolan*.

Dilihat dari representasi visual, subjek memiliki suatu sistem kepercayaan yang dilandasi persepsi visual. Sistem kepercayaan seseorang seringkali mempengaruhi kinerjanya dalam menyelesaikan masalah (Hart, 1993: 28). Contohnya, subjek mengharapkan supaya panjang suatu ruas garis sama dengan 3 kali panjang ruas garis lain dalam suatu representasi visual. Persepsi visual seseorang

mempengaruhinya dalam menyelesaikan masalah-masalah visualistik, bahkan persepsi tersebut seringkali merupakan kepercayaannya. Tetapi, dalam penelitian ini juga ditemukan bahwa tingkatan berpikir seseorang dalam mengerjakan soal visualistik dan yang nonvisualistik berbeda. Misalnya, pada waktu menyelesaikan soal dimana representasi visual terutama berperan sebagai alat bantu atau soal yang nonvisualistik, susunan jawaban subjek menunjukkan bahwa mereka telah mampu berpikir formal.

Sewaktu mengerjakan soal yang memerlukan kekuatan visual, tahap berpikir subjek belum formal atau baru ilusi optik. Sebagai contoh, ditemukan bahwa subjek mempunyai pemahaman yang baik dan benar tentang diagonal ruang suatu kubus, termasuk posisi diagonal tersebut apabila dirotasikan dengan pusat putaran adalah tengah-tengah diagonal ruang tersebut. Akan tetapi, sewaktu visualisasi kubus harus dilengkapi dengan bola yang melalui titik-titik sudut kubus, dan subjek diminta untuk mencari jari-jari bola, ternyata mereka tidak dapat mengetahui hubungan antara diagonal ruang kubus dengan diameter bola. Subjek menuliskan dan menyatakan bahwa jari-jari bola sama dengan setengah rusuk ditambah dengan jarak dari titik potong diagonal sisi atas dengan permukaan bola. Ternyata ilusi optik yang menjadi kepercayaan karena persepsi visual seseorang tersebut belum sertamerta dapat mengubah tingkatan berpikirnya. Ditemukan pula bahwa masih ada subjek yang menyelesaikan masalah dengan hanya menggunakan suatu kasus khusus. Mereka ingin menunjukkan kesamaan luas dari kedua bangun geometri (instrumen nomor 3) menggunakan rumus luas daerah. Tetapi, karena belum dapat berpikir formal atau belum dapat melakukan abstraksi, maka jawaban disusun menggunakan kasus khusus, yakni dengan mengambil suatu panjang tertentu. Temuan ini memperkuat hasil penelitian yang dilakukan Rif'at (1997: 125), yakni, 32% dari subjek penelitian masih berpikir *ilustratif* dalam menyusun bukti.

Dalam menyelesaikan masalah matematika, hal yang umum boleh saja dikurangi menjadi kasus khusus, karena selesaian dari kasus khusus itu mungkin memberikan inspirasi bagi selesaian umum. Akan tetapi, selesaian khusus hendaklah hanya

dijadikan sebagai strategi agar dapat mencapai kompleksitas maksimum dari masalah. Atau, penggunaan kasus khusus dapat dilakukan jika tidak kehilangan sifat umum dari masalah. Penggunaan kasus khusus tersebut memungkinkan kelanjutan penyelesaian masalah dapat disusun dengan lebih mudah (Schoenfeld, 1985: 80). Walaupun penggunaan kasus khusus dimungkinkan dalam menyelesaikan masalah, dalam penelitian ditemukan hal yang berbeda, yakni: (1) penggunaan kasus khusus adalah *mengkhususkan*-bukan mengambil kasus khusus dari masalah, (2) mengubah visual segitiga sebarang menjadi segitiga siku-siku, dan (3) hanya menyusun penyelesaian dari kasus khusus. Selesaian berkenaan dengan ketiga temuan tersebut muncul pada susunan jawaban soal instrumen nomor 4, 5, dan 6.

Selesaian soal nomor 4 yang diharapkan adalah bahwa subjek menggunakan fakta visual yang ada, kemudian melengkapinya supaya mendapatkan jawaban yang benar. Berkaitan dengan hal ini, representasi visual memainkan peranan penting, yakni subjek memerlukan: (a) garis tinggi dari suatu titik sudut atau dari semua titik sudut segitiga, (b) garis-garis hubung antara titik A dengan D dan titik B dengan D, dan (c) diameter lain, selain DC, misalnya yang ditarik dari A. Selesaian yang ditunjukkan oleh subjek seperti (a) tersebut dapat dikatakan bahwa prosedur formal mencari sinus suatu sudut merupakan bagian kemampuan seseorang pada ranah kognitifnya. Hal ini, menurut Schoenfeld (1985: 17) berkaitan dengan pemahaman mengenai suatu sifat yang tidak formal dalam hal ini adalah representasi visual segitiga.

Mengenai keperluan seperti bagian (b) dan (c), yakni subjek menghubungkan titik A dengan D, titik B dengan D, dan mengkonstruksi diameter lain berkaitan dengan kemampuan bersesuaian yang dibutuhkan dalam menyelesaikan soal instrumen nomor 4. Kemampuan tersebut mencakup pembuatan argumen matematis atau kemampuan struktural. Sebagai contoh, keperluan tersebut dihubungkan dengan kebutuhan seseorang untuk mendapatkan segitiga-segitiga siku-siku dan mendapatkan kesamaan suatu sudut segitiga dengan sudut lain. Kebutuhan tersebut sangat terkait dengan pemahaman konseptual dan struktural seseorang.

Pemahaman konseptual yang dimaksud adalah bahwa subjek mengerti tentang konsep sinus dan konsep sudut keliling, sedangkan pemahaman struktural merupakan kemampuan melihat hubungan antarkonsep tersebut.

Berkenaan yang memerlukan kemampuan visual 3, subjek diminta mengkonstruksi suatu visual menggunakan strategi analogi dari contoh yang diberikan. Walaupun mereka diminta *mengkonstruksi*, kekuatan melakukan manipulasi dari representasi analitik masih menonjol. Misalnya, ada subjek yang menunjukkan bahwa $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ dengan cara: (a) mengkonstruksi visual tetapi tidak konsisten menempatkan dan menggunakan skala yang telah ditetapkan sebelumnya, (b) melakukan manipulasi aljabar, (c) mengambil kasus-kasus khusus atau memberikan suatu ilustrasi, dan (d) mengkonstruksi sebagian-sebagian, yakni konstruksi dari $a(a - b)$ dan $b(a - b)$, kemudian diselesaikan secara analitik.

Begitu pula pengkonstruksian masalah: Jika $a, b < 0$ dan $a > b$ maka $a^2 < b^2$. Subjek tidak konsisten menggunakan sistem koordinat yang telah digunakan sebelumnya. Hal tersebut berakibat pada susunan selesaian yang dibuat, yakni jawaban disempurnakan dengan menggunakan manipulasi analitik atau aljabar. Misalnya, dari representasi visual didapat bahwa $-a^2 > -b^2$. Selesaian analitik yang ditunjukkan pada soal $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ terkesan kurang kreatif. Subjek melakukan manipulasi simbol secara mekanistik dan hanya sebagai kegiatan rutin. Tetapi, jika mereka harus menyusunnya secara visual, kreatifitas mulai tampak, bahkan kemampuan mereka menjadi beragam.

Subjek yang menyusun selesaian secara tidak konsisten dalam menggunakan penskalaan adalah bahwa mereka mengganti besaran dari suatu fakta visual, padahal secara visual besaran tersebut tidak dapat diganti. Dalam hal ini, subjek menetapkan panjang suatu ruas garis sama dengan b dan $-b$ secara bersamaan, tanpa menyadari bahwa $-b$ tidak dapat digunakan sebagai simbolisasi dari panjang ruas garis. Temuan tersebut merupakan fakta bahwa subjek penelitian ini belum pada taraf berpikir akurat (*rigor*), yakni mereka belum menyadari sistem matematika secara formal dan belum dapat

mempelajari situasi visualistik tanpa model tertentu (Hiele, 1986: 77) atau, menurut Flores (1993: 7) sebagai kemampuan menggeneralisasi suatu sistem matematika kepada sistem lain. Dalam hal ini, dari sistem aljabar kuantitatif ke sistem aljabar vektor.

Selain manipulasi visualistik yang beragam, ditemukan pula selesaian kasus, yang menggunakan representasi ilustratif, baik yang analitik maupun visualistik. Sebagai contoh, subjek menetapkan nilai-nilai a dan b , kemudian menunjukkan bahwa proposisi atau hubungan aljabar yang ada dalam soal adalah benar atau berlaku. Subjek masih memisahkan antara representasi analitik dengan visual. Belajar representasi visual tersebut seringkali mengakibatkan bahwa peserta didik tidak mengenal komponen, sifat, dan hubungan antarsifat yang dapat dikembangkan dalam suatu visualisasi (Clements, Swaminathan, Hannibal, dan Sarama, 1999: 26). Dengan istilah lain, dapat pula dimengerti bahwa subjek belum memahami visual sebagai konsep-bukan hanya kongkritisasi dari konsep. Apabila visual dipahami sebagai konsep, maka ia berkemungkinan dikembangkan kedalam kegiatan matematika.

Ditemukan bahwa lama perkuliahan tidak mempengaruhi kinerja visualistik dari subjek. Kinerja subjek dapat dibedakan secara kualitatif hanya pada kecenderungan mereka menyusun selesaian yang nonvisualistik atau analitik formal. Dalam hal ini, subjek yang berada pada semester yang lebih tinggi cenderung menyusun selesaian secara analitik formal, walaupun ada juga yang menyelesaikannya secara ilustratif. Walaupun subjek pada semester lebih tinggi cenderung menyusun selesaian secara analitik formal, ditemukan bahwa selesaian tersebut tidak menunjukkan kemampuan analitik. Temuan ini memperkuat hasil penelitian Rif'at (1997: 130) bahwa mahasiswa cenderung menyusun bukti secara formal berrepresentasi analitik, tetapi bukti yang dibuat jelek atau tidak benar.

Ciri yang menonjol pada jenis selesaian adalah kepentingan cara menyusun bukti dalam matematika. Kepentingan mengenai cara membuktikan seringkali menajamkan perbedaan antara yang benar secara logika dengan yang benar secara konseptual.

Sebagai misal, masih banyak orang yang belajar matematika menunjukkan bahwa $3 \leq 5$ dengan cara kontradiksi, yakni mulai dengan menyatakan bahwa tidak benar $3 \leq 5$ atau $3 > 5$. Karena tidak benar bahwa $3 > 5$, maka berarti pengandaian yang dibuat adalah salah. Karena itu disimpulkan bahwa $3 \leq 5$. Apabila dikaji dari segi cara membuktikan, susunan selesaian seperti itu benar. Tetapi, secara konseptual, susunan bukti seperti itu salah. Karena ada definisi formal mengenai $a < b$ dengan a dan b bulat, walaupun masih diperlukan hubungan logika yang berlaku, yakni disjungsi.

Subjek menyelesaikan masalah visualistik masih menunjukkan kerancuan hirarki dari tahapan berpikir, yakni dari formal ke kongkrit atau ilustratif. Kesimpulan yang dibuat subjek menunjukkan bahwa mereka memahami trapesium dan persegi panjang bukan sebagai konsep, tetapi merupakan sifat-sifat fisik. Karena itu, subjek memandang visualisasi soal nomor 3 sebagai dua benda berbeda bentuk, dimana dari salah satu bentuk dapat dibuat bentuk lain. Atau, mereka memikirkannya sebagai satu benda berbentuk trapesium, yang kemudian dapat diubah menjadi benda berbentuk persegi panjang.

Subjek pada semester lebih tinggi memang cenderung menyusun selesaian secara analitik, tetapi, ditemukan empat hal yang perlu dibahas berkaitan dengan jawaban mereka, yakni: (a) sewaktu subjek mengalami kesulitan mendapatkan hubungan lebih besar atau lebih kecil, mereka melakukan kekeliruan berkenaan dengan cara pembuktian, (b) sewaktu subjek mengalami kesulitan menyusun selesaian, subjek mengganti atau menukar panjang ruas garis yang dinyatakan dengan a atau b dengan ruas garis yang dinamakan menggunakan titik-titik ujung ruas garis, (c) manipulasi dari penjabaran hubungan analitik atau aljabar yang simbolik ternyata lebih menyulitkan subjek dalam mendapatkan jawaban dibandingkan dengan apabila mereka melakukan manipulasi dari dan menggunakan representasi visual; bahkan, dengan melakukan manipulasi visualistik, jawaban benar dan beragam, tetapi melalui manipulasi simbolik, susunan jawaban cenderung keliru, tidak tepat, salah cara pembuktian, dan hampir seragam, dan (d) sewaktu subjek mengalami kesulitan mendapatkan jawaban, mereka

menggunakan contoh-contoh khusus, misalnya menetapkan nilai-nilai tertentu untuk a dan b , kemudian dihitung dan ditunjukkan hubungan yang berlaku. Kecenderungan menyusun penyelesaian secara analitik simbolik yang ditunjukkan oleh subjek pada semester lebih tinggi dapat dipahami berdasarkan pola pembelajaran matematika, yakni semakin simbolik atau abstrak dengan kekuatan pada logika deduktif dalam perbendaharaan komponen sistem aksiomatik. Penting diketahui pendapat Susanna (1994: 47) bahwa, logika deduktif tidaklah selalu cocok bagi pembelajar. Bahkan, ia menyatakan pula bahwa, banyak siswa yang memasuki perguruan tinggi dengan sedikit intuisi dan lebih merasakan kepentingan logika dalam menyelesaikan masalah.

Pernyataan Susanna tersebut memperkuat hasil penelitian ini, yakni kecenderungan mahasiswa menyusun penyelesaian yang mengandalkan kekuatan logika deduktif. Temuan mengenai kecenderungan subjek menyusun penyelesaian dengan menggunakan logika deduktif, dalam kaitan dengan pembelajaran, dapat dipahami karena visualisasi yang ada dalam perkuliahan geometri dijadikan sebagai sarana berpikir abstrak (Hoffer, 1981: 45), padahal tidak efektif bagi sebagian besar pembelajar (Susanna, 1994: 51). Mungkin, penggunaan representasi visual sebagai sarana berpikir dengan alasan bahwa visualisasi merupakan kongkritisasi (Schoenfeld, 1994: 83).

Dalam penelitian ini ditemukan bahwa visualisasi tidak dapat hanya dipandang sebagai kongkritisasi atau sekedar memandangnya dalam rangka memudahkan seseorang menyusun representasi analitik simbolik. Ternyata visualisasi dapat membantu dalam menyusun representasi simbolik, misalnya banyak keputusan analitik dibuat berdasarkan fakta visual. Dari temuan tersebut dapat ditafsirkan bahwa: (a) telah terjadi manipulasi visual dan (b) manipulasi simbolik yang memerlukan logika deduktif seringkali sulit digunakan dalam menyelesaikan soal. Kemampuan subjek dalam berpikir abstrak-analitik simbolik memang masih rendah, apabila dipandang dari penyelesaian formal mereka. Susanna (1994: 57) mengatakan bahwa banyak matematikawan bersikap bahwa kemampuan berpikir abstrak merupakan bakat yang tidak dapat

diajarkan. Susanna kemudian meyakinkan pendapatnya melalui suatu penelitian, yakni masih banyak pembelajar yang tidak dapat menggunakan Hukum De Morgan dengan benar, jika dibandingkan dengan pengerjaan soal-soal yang memerlukan keterampilan praktis.

Kemampuan visual dalam pembelajaran matematika selama ini masih dimasukkan kedalam kelompok berpikir intuitif atau informal yang terpisah dengan kelompok berpikir formal. Padahal telah banyak hasil penelitian yang menunjukkan bahwa kedua kemampuan berpikir tersebut selalu sulit dipisahkan (Schoenfeld, 1985: 91). Hasil penelitian lain menunjukkan bahwa pembelajar masih menyandikan informasi visual secara analog-tidak proposisional (Hiele, 1973: 39), dan banyak pula hasil penelitian yang menunjukkan bahwa kesalahan konsep terjadi karena pandangan visual, misalnya khayalan optikal dan harapan perseptual semu (Gravemeijer, 1991: 100).

Objek visual dalam penelitian ini dipandang sebagai objek belajar langsung, yakni bahwa objek tersebut dapat merupakan fakta, keterampilan, konsep, dan prinsip. Gambar-gambar yang digunakan adalah yang sudah dikenal subjek atau merupakan fakta. Keterampilan merupakan kemampuan subjek memvisualisasikan situasi masalah secara benar atau tepat dalam arti sketsa. Konsep merupakan gagasan abstrak mengenai objek visual sehingga diharapkan bahwa subjek dapat membedakan fakta-fakta visual yang ada secara benar. Sedangkan prinsip, dalam pembelajaran ini, dimaksudkan sebagai aturan atau sifat atau dalil yang berlaku pada objek visual. Pembelajaran objek belajar langsung tersebut dilakukan dalam rangka menyelesaikan masalah-masalah visual.

Setelah pembelajaran ditemukan bahwa kemampuan membuat hubungan tidak meningkat, ilusi optikal masih muncul tetapi tidak signifikan secara statistik, dan kemampuan melakukan manipulasi visual meningkat. Kemampuan membuat hubungan tidak meningkat dikarenakan bahwa subjek cenderung memilih representasi analitik atau menyusun hubungan analitik dari representasi visual. Dengan demikian, manipulasi yang menonjol adalah simbolik atau abstraksi dari fakta visual. Banyak

subjek yang masih mengandalkan ilusi optikal tidak begitu berarti, yakni 7 dari 40 subjek sampel. Sedangkan kemampuan melakukan manipulasi visual meningkat secara signifikan. Berkaitan dengan manipulasi ini, ditemukan bahwa representasi visual yang dikonstruksi subjek tidak disertai dengan representasi analitiknya.

Kelemahan menyusun selesaian secara analitik formal, menurut Mikio (2000: 11) adalah karena, pembelajaran matematika secara formal tak dapat memperbaiki rasa tak menyenangkan pembelajar mengenai formalitas matematika. Mikio mengusulkan kepentingan proses konstruksi yang melandasi selesaian masalah, terutama berpusat pada proses penjelasan melalui kegiatan pada representasi-representasi yang dapat dimanipulasi. Dari sudut pandang representasi visual, selesaian masalah-masalah visual dapat dibedakan antara penjelasan yang dikonstruksi dan proses konstruksi dari penjelasan. Istilah pertama berhubungan dengan susunan selesaian yang merupakan representasi analitik simbolik, sedangkan yang kedua berkaitan dengan representasi visual yang manipulatif. Mikio (2000: 255) berpendapat bahwa objek visual lebih membantu pembelajar dalam menyajikan proses berpikir mereka daripada representasi bahasa dan simbol. Visual yang dapat dimanipulasi lebih terpakai daripada sekedar sebagai alat bantu.

Kegiatan memanipulasi objek visual, atau kegiatan yang mengetahui bagaimana melakukan manipulasi tersebut merupakan kemampuan penting dalam menyajikan suatu rantai dari penalaran deduktif. Akihiko (2000: 76) menyatakan bahwa representasi verbal kadang-kadang sulit dipahami pembelajar, sedangkan representasi visual dapat membantu mereka memahami situasi masalah, terutama apabila masalah itu sulit dipahami hanya dengan representasi verbal. Setelah pembelajaran visual, ditemukan bahwa jenis-jenis kesalahan berubah, baik kuantitas maupun kualitas. Sebelum perlakuan dan pada kelompok kontrol, banyak kesalahan adalah sama dan jenisnya pun serupa. Kesalahan yang muncul, secara umum dikarenakan: (a) visual belum digunakan dalam menyelesaikan masalah, (b) cenderung menyusun representasi analitik dan memanipulasinya, dan (c) kekeliruan

memahami visual sebagai konsep. Setelah pembelajaran, ditemukan pula bahwa subjek yang masih mengandalkan representasi analitik cenderung menyusun jawaban secara salah, sedangkan subjek yang memanfaatkan situasi visual dan atau memanipulasinya, dapat menjawab dengan benar. Kesalahan yang dimaksud antara lain adalah bahwa jawaban tidak tuntas atau subjek menggunakan contoh-contoh khusus. Sedangkan jawaban yang disusun secara benar bersandarkan pada situasi visual yang tepat dan karena kreasi-kreasi visual.

Pola-pola kesalahan analitik juga hampir seragam, yakni salah membuat hubungan antara representasi visual dengan representasi analitik, salah menggunakan prinsip atau sifat-sifat visual, yakni kesebangunan, salah memvisualisasikan masalah, dan salah dalam menggunakan logika deduktif. Lamon (1973: 26) menyatakan bahwa, selesaian dengan cara melakukan pemeriksaan apakah suatu jawaban dipenuhi atau tidak dapat menjadi suatu bentuk kesulitan verbalistik atau linguistik. Ia menyarankan agar bentuk kesulitan kebahasaan tersebut dihilangkan dalam pembelajaran matematika, dalam rangka meningkatkan kemampuan pembelajar dalam menyelesaikan masalah. Akihiko (2000: 37) menyatakan bahwa representasi verbal kadang-kadang sulit dipahami pembelajar, sedangkan representasi visual dapat membantu mereka memahami situasi masalah, terutama apabila masalah itu sulit dipahami hanya dengan representasi verbal.

Setelah pembelajaran visual, ditemukan bahwa jenis-jenis kesalahan berubah, baik kuantitas maupun kualitasnya. Sebelum perlakuan dan pada kelompok kontrol, banyak kesalahan adalah sama dan jenisnya pun serupa. Kesalahan yang muncul, secara umum dikarenakan: (a) visual belum digunakan dalam menyelesaikan masalah, (b) cenderung menyusun representasi analitik dan memanipulasinya, dan (c) kekeliruan memahami visual sebagai konsep. Setelah pembelajaran, ditemukan pula bahwa subjek yang masih mengandalkan representasi analitik cenderung menyusun jawaban secara salah, sedangkan subjek yang memanfaatkan situasi visual dan atau memanipulasinya, dapat menjawab dengan benar. Kesalahan yang dimaksud antara lain adalah bahwa

jawaban tidak tuntas atau subjek menggunakan contoh-contoh khusus. Sedangkan jawaban yang disusun secara benar berdasarkan pada situasi visual yang tepat dan karena kreasi-kreasi visual.

Pola-pola kesalahan analitik juga hampir seragam, yakni salah membuat hubungan antara representasi visual dengan representasi analitik, salah menggunakan prinsip atau sifat-sifat visual, yakni kesebangunan, salah memvisualisasikan masalah, dan salah dalam menggunakan logika deduktif. Tampak bahwa selesaian yang disusun subjek lebih dikarenakan pengutamaan penerapan konsep daripada memperhatikan struktur masalah. Temuan tersebut dikuatkan juga dari pengerjaan soal lain. Dalam menyelesaikan soal, subjek lebih mengutamakan representasi masalah daripada memperhatikan fakta visual.

Selama ini, pembelajaran matematika menekankan pada isi dan kemampuan berpikir abstrak, dengan representasi yang analitik formal. Dalil mengenai belajar yang dijadikan landasan terutama adalah bahwa belajar merupakan kegiatan pemindahan pengetahuan dan pembelajar harus menyerapnya. Matematika dipandang sebagai kumpulan pengetahuan yang berakumulasi dan harus menjadi perbendaharaan bagi pembelajar. Logika deduktif bukan menjadi tujuan akhir, tetapi tujuan awal. Karena itu, bentuk-bentuk representasi hanya digunakan sebagai alat bantu, belum sebagai alat berpikir menuju kemampuan abstrak. Pembelajaran matematika seperti itu ternyata selalu meninggalkan isu bahwa pelajaran matematika kurang disenangi dan sulit dipelajari.

Sumarmo (1987), dalam penelitiannya, menemukan bahwa kemampuan formal siswa masih rendah. Kesulitan terjadi dikarenakan bahwa gambar belum dimanipulasi oleh siswa. Kajian penelitian tersebut serupa dengan penelitian yang dilakukan Mikio (2000: 255-257) berkaitan dengan kepentingan proses konstruksi dari penjelasan dengan cara melakukan manipulasi atas gambar. Mikio menemukan bahwa melalui manipulasi gambar, siswa lebih mudah menemukan jawaban. Melalui manipulasi gambar, kemampuan matematika pembelajar tidak hanya meningkat dalam geometri, tetapi juga dalam aljabar. Sebagai contoh, Warren

(2000), dalam penelitiannya menemukan bahwa: (1) pembelajar dengan kemampuan melakukan proses penalaran visualisasi keruangan berkorelasi signifikan terhadap skor tes aljabar dengan tiga komponen pemolaan, yakni pembuatan pola, tabel, dan variabel, dan (2) keberhasilan dalam tes aljabar untuk ketiga komponen tersebut memerlukan proses melengkapi pola dan proses penalaran visualisasi keruangan keduanya, sedangkan keberhasilan tes aljabar untuk komponen tabel hanya memerlukan visualisasi keruangan.

SIMPULAN

Terdapat perbedaan kemampuan visual mahasiswa antara mereka yang diajar dengan pola pembelajaran visual 1, 2, dan 3. Skor kemampuan visual setelah Pembelajaran Visual 3 lebih baik daripada setelah Pembelajaran Visual 2, dan skor kemampuan visual mahasiswa setelah Pembelajaran Visual 2 lebih baik daripada setelah Pembelajaran Visual 1.

Terdapat perbedaan kemampuan visual mahasiswa menurut interaksi antara pola pembelajaran dengan semester perkuliahan, yaitu bahwa: (a) skor kemampuan visual mahasiswa semester 1, 3, 5, dan 7 semuanya lebih tinggi setelah Pembelajaran Visual 3 dibandingkan dengan skor kemampuan visual setelah Pembelajaran Visual 2 dan 1, dan skor kemampuan visual setelah Pembelajaran Visual 2 lebih tinggi daripada setelah Pembelajaran Visual 1, (b) skor kemampuan visual mahasiswa semester 3 lebih tinggi daripada skor mahasiswa semester 1 setelah Pembelajaran Visual 1 dan 2 dan tidak berbeda setelah Pembelajaran Visual 3, (c) skor kemampuan visual pada mahasiswa semester 1 tidak berbeda dengan mahasiswa semester 7 setelah masing-masing Pembelajaran Visual, (d) skor kemampuan visual mahasiswa semester 3 lebih tinggi daripada skor mahasiswa semester 5 setelah Pembelajaran Visual 1 dan 3 dan lebih rendah setelah Pembelajaran Visual 2, (e) skor kemampuan visual mahasiswa semester 7 lebih rendah daripada skor mahasiswa semester 5 setelah Pembelajaran Visual 1 dan 2, tetapi lebih tinggi setelah Pembelajaran Visual 3, dan (f) tidak terdapat interaksi antara mahasiswa

semester 3 dan 5 dengan Pembelajaran Visual 1 dan 3.

IMPLIKASI

Melalui pembelajaran visualistik, terjadi peningkatan kemampuan visual mahasiswa dalam menyelesaikan soal yang memerlukan representasi visual. Pola visual 1 menekankan dan mementingkan kegiatan memvisualisasikan situasi masalah secara benar dan tepat. Kegiatan tersebut, dalam materi kurikulum matematika saat ini lebih sedikit dibandingkan dengan saat peneliti berkuliah, yaitu tahun 1981 dan sebelumnya. Kemampuan yang seharusnya muncul dalam setiap pembelajaran matematika adalah kemampuan spasial dengan kekuatan pada tilik ruang.

Materi kurikulum yang berkaitan dengan representasi-representasi visual, menurut peneliti, dapat dibedakan kedalam 6 ciri, yaitu:

1. Masa pelaksanaan kurikulum tradisional hingga tahun 1975, yang secara jelas memisahkan pelajaran-pelajaran kevisualan kedalam pelajaran Geometri, Geometri Lukis, dan Geometri Analitik. Pada masa tersebut, representasi analitik dan visual dalam rangka menyelesaikan masalah seperti himpunan-himpunan yang saling lepas. Pendekatan pembelajaran terutama menampakkan matematika sebagai pengetahuan prosedural. Dalam pendekatan ini, representasi visual masih ditampakkan sebagai suatu bentuk representasi lain dalam matematika, walaupun keterkaitannya dengan representasi analitik belum terlalu jelas.
2. Masa pelaksanaan kurikulum 1975 hingga 1984, yang dikenal sebagai era matematika baru dan kurikulum 1984 hingga 1994. Pendekatan pada kedua era tersebut menampakkan matematika sebagai pengetahuan konseptual dan struktural. Melalui pendekatan tersebut, representasi visual terutama muncul sebagai alat bantu dalam rangka memahami konsep yang analitik-proposisional. Meskipun begitu, mulai dirasakan keterkaitan antara representasi visual dengan analitik.
3. Mulai tahun 1994, kurikulum LPTK memuat perkuliahan tentang geometri transformasi. Dalam geometri transformasi, representasi visual digunakan dalam rangka memberikan gambaran perseptual dari berbagai kemungkinan logis bagi susunan analitik. Dengan kata lain, yang diutamakan adalah representasi analitik dengan mengandalkan kekuatan berpikir menggunakan logika deduktif bagi pemahaman akan kepentingan mengembangkan sistem aksiomatik. Uraian-uraian yang muncul dalam penyelesaian masalah adalah verbalistik.
4. Tahun 1998, kita memulai menerapkan Kurikulum Berbasis Kompetensi (KBK). Dalam kaitan dengan representasi visual, sesungguhnya kurikulum ini sudah menampakkan kepentingan representasi tersebut. Namun, perolehan belajar peserta didik masih belum memuaskan antara lain dikarenakan belum dapat menjangkau anak berbakat dalam matematika.
5. Tahun 2004 dimulai Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP). Dalam konteks kompetensi keruangan masih "kabur" dikarenakan standar kompetensi belum eksplisit dituliskan. Peneliti menemukan bahwa melalui KTSP, keterampilan peserta didik masih rendah, terutama dalam menggunakan alat-alat pembelajaran.
6. Mulai tahun 2013, kita melaksanakan Pengembangan Kurikulum 2013 (PK 2013). Meskipun masih baru, penerapan kurikulum ini masih terkendala terutama dalam mengintegrasikan kompetensi inti. Kompetensi inti berjalan masing-masing, bahkan sebagian besar pendidik belum dapat menerapkan KI-1 maupun KI-2 secara terpadu dalam mengemas perangkat pembelajaran matematika.

Isu tentang kemampuan konsep yang rendah dan peserta didik kurang berminat dalam matematika, apabila dikaitkan dengan kepentingan representasi visual dapat dipahami: (1) orang yang berkemampuan dalam hal spasial mempunyai kemampuan lebih dalam bidang matematika secara

umum, bahkan lebih berhasil pada studi lanjut, dan (2) banyak faktor yang menyebabkan berkurangnya minat pembelajar dalam matematika tetapi, faktor yang menonjol adalah karena matematika dirasakan sukar oleh mereka. Kesukaran tersebut terutama dikarenakan representasi analitik dengan logika deduktifnya.

Pembelajaran visual menekankan kepentingan melengkapi dan memanipulasi representasi gambar dalam rangka menyelesaikan masalah. Kemampuan formal peserta didik yang masih rendah terkait kegiatan memanipulasi gambar. Pembelajaran melalui kegiatan manipulasi representasi visual, kemampuan berpikir visual dan analitik tidak dapat dipandang sebagai tingkat berpikir yang diskrit, tetapi sebagai kemampuan dengan memandang representasi visual sebagai objek manipulatif, dimana pada tahap awal kegiatan berpikir analitik tidak perlu terkait dengan berpikir visual tersebut.

Kemampuan visualistik setara dengan kemampuan analitik, bahkan melalui konstruksi visual, diperoleh kemampuan lain, seperti berkreasi, berpikir konseptual, dan struktural dalam melihat masalah. Akan tetapi, jika kemampuan berpikir tersebut paralel, maka selesaian yang disusun akan menampilkan kemampuan visual yang dapat digunakan dalam menyelesaikan masalah dengan representasi analitik formal. Atau, kegiatan berpikir sistematis visualistik sebagai alternatif dari berpikir sistematis analitik.

National Research Council (1989: 10) dan Steen (1988: 45) menyatakan bahwa, visualisasi berperan penting dalam rangka kemampuan matematika. Steen (1990: 2) juga menyatakan bahwa:

Thanks to computer graphics, much of the mathematician's search for patterns is now guided by what one can really see with the eye, whereas nineteenth-century mathematical giants like Gauss and Poincaré had to depend more on seeing with their mind's eye. For centuries the mind has dominated the eye in the hierarchy of mathematical practice; today the balance is being restored as mathematicians find new ways to see patterns, both with the eye and with the mind.

Pool (1992: 89) menyatakan bahwa, representasi-representasi visual yang dikembangkan

melalui perangkat lunak komputer memungkinkan bagi para ahli matematika untuk memvisualisasikan materi matematika tentang dalil-dalil yang analitik-abstrak. Sedangkan Mandelbrot (1983: 49) menyatakan bahwa, konjektur-konjektur yang baru dapat dimunculkan oleh persepsi. Tetapi sayang, Galindo (1995: 66) menyatakan bahwa, visualisasi dalam matematika sekolah kurang berperan (*low status*) untuk waktu yang lama dan menyatakan:

It seems thus natural to think that if we want students to do mathematics the same way as mathematicians do it, computers and visualization should also have an important role in mathematics education. However, it seems that visualization has had for a long time a low status in school mathematics. (Galindo, 1995: 322)

Sepengetahuan peneliti, pemanfaatan perangkat lunak guna mendukung pembelajaran matematika sebatas dalam rangka meningkatkan minat belajar matematika. Pembelajaran visual berupa kegiatan mengkonstruksi gambar dari suatu representasi analitik sungguh penting. Selama ini, peran konstruksi visual sebatas sebagai alat bantu, belum dalam rangka menyelesaikan masalah, artinya selesaian disusun secara analitik. Pembelajaran visual yang diharapkan disusun dari situasi visual yang dikonstruksikan. Kegiatan pembelajaran adalah membangun proses berpikir dalam representasi visual, yaitu menemukan (mengkonstruksi) gambar yang sesuai dan melengkapinya sehingga cocok dengan situasi analitik yang diberikan. Dreyfus (1991: 34) menyatakan bahwa, visualisasi dari konsep atau prinsip merupakan strategi berpikir yang berguna dan efisien dalam banyak pokok bahasan matematika, meskipun hanya merupakan langkah menuju kepada matematika sesungguhnya. Ia menyatakan:

The message is that visualization may be a useful and efficient learning aid for many topics in high school and college mathematics, but nevertheless an aid, a crutch, a step, sometimes a necessary and important step, but only a step on the way to the real mathematics.

Berbeda dengan Dreyfus, Galindo (1995: 51) justru menyatakan bahwa, perbedaan kinerja matematika mahasiswa disebabkan karena belum

muncul metode visual dalam menyelesaikan masalah matematika. Sebagai contoh, Lean dan Clements (1981: 44) menemukan bahwa, mahasiswa fakultas teknik tahun pertama yang memilih untuk menyelesaikan masalah matematika secara verbal dengan pengutamaan kekuatan menggunakan logika deduktif cenderung berkinerja lebih rendah daripada mahasiswa yang memilih selesaian visual dalam tes-tes matematika. Oleh karena itu, representasi visual yang dikonstruksi termasuk komponen rantai penalaran (*chain of reasoning*) dalam rangka mencapai kemampuan analitik yang formal. Perlu dikaji pula apa yang dinyatakan oleh Krutetskii (1976: 128) dan Presmeg (1986: 85) bahwa, kesulitan visualisasi merupakan ketidakmampuan seseorang mengaitkannya dengan representasi simbol, yang merupakan proses saling kait pada kemampuan visual. Berpikir visual dan analitik perlu dipadukan dalam rangka membangun atau mengembangkan pemahaman yang lebih kaya mengenai konsep-konsep matematika (Presmeg, 1992: 77).

DAFTAR PUSTAKA

- Akihiko, T. 2000. Using manipulatives in problem solving lesson. Makalah disajikan dalam *The 24 th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Hiroshima, 23-27 Juli 2000.
- Barbin, E. 1993. The epistemological roots of a constructivist. Dalam John A. Malone dan Peter C.S. Taylor, *constructivist interpretation of teaching and learning mathematics*. Perth: National Key Centre for School Science and Mathematics.
- Begle, E. G. 1979. *Critical variables in mathematics education: Findings from a survey of empiric literatur*. Washington, D.C. : Mathematics Association of America.
- Bell, F. H. 1978. *Teaching and learning mathematics* (In Secondary Schools). Dubuque, Iowa: Wm C Brown.
- Clements, D. H. dan Battisda, M. T. 1992. Geometry and spatial reasoning. Dalam Douglas A. Grouws (Ed.), *Handbook of research om mathemtics teaching and learning*. USA: Macmillan.
- Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., dan Sarama, J. 1999. Young children's concepts of shape. *Journal for research in mathematics education*, 30 (2), hal. 192-212.
- de Groot, A. D. 1965. *Thought and choice in chess*. The Hague: Mouton.
- Dreyfus, T. 1991. On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. Dalam F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the fifteenth international conference for the psychology of mathematics education*, 1, hal. 33-48.
- Flores, A. 1993. Phytagoras meets Van Hiele. *School science and mathematics*, 3, hal. 152-157.
- Gagne, R. M. 1984. *Kondisi belajar dan teori pembelajaran*. Terjemahan Munandir. 1989. Jakarta: DIKTI.
- Galindo, E. (Eds.) 1995. Visualization and students' performance in technology-based calculus. Dalam Douglas T. Owens, Michelle K. Reed, dan Gayle M. Millsaps (Eds.), *Proceedings of seventeenth annual meeting for psychology of mathematics education*, 2, hal. 321-326. Columbus: ERIC.
- Gravimeijer, K.P.E. 1991. An instruction-theoretical reflection on the use manipulatives. Dalam Leen Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school*, hal. 57-73. Culemborg: Technipress.
- Grouws, D. A. (Ed.). 1992. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. USA: Macmillan.
- Hart, L. C. 1993. Some factors that impede or enhance performance in mathematical problem solving. *Journal for research in mathematics education*, 24 (2), hal. 167-171.
- Hiele, P. M. V. 1973. Begrip en inzicht. Dalam K.P.E. Gravemeijer (Ed.), *Realistic mathematics education in primary*, hal. 57-76. Culemborg: Technipress.
- Hiele, P.M. V. 1986. *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando: Academic Press.
- Hinsley, A., Hayes, J.R., dan Simon, H. A. 1977. From words to equation: Meaning and representation in algebra word problems. Dalam P.A. Carpenter dan M.A. Just (Eds.),

- Cognitive process in comprehension*. Hillsdale, New Jersey: LEA.
- Hoffer, A. 1981. Geometry is more than proof. *Mathematics teacher*, January, 11-17.
- Kartono, K. 1976. *Pengantar metodologi research sosial*. Bandung: Alumni.
- Krutetskii, V. A. 1976. *The psychology of mathematical abilities in school children*. Dalam Jeremy Kilpatrick dan Izaak Wirszup (Eds.). Chicago: University of Chicago Press.
- Lamon, W.E. 1973. *Learning and the nature of mathematics*. Chicago: SRA.
- Lean, G. dan Clements, M.A. 1981. Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational studies in mathematics*, 12, hal. 267-299.
- Mandelbrot, B. 1983. *The fractal geometry of nature*. San Fransisco: Freeman.
- Matlin, M. W. 1994. *Cognition* (edisi ketiga). USA: Holt, Reinhart and Winston.
- Mikio, M. 2000. New perspective for teaching proof. Makalah disajikan dalam *The 24 th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Hiroshima, 23-27 Juli 2000.
- Mundy, J. F. 1985. Analysis of error in first year calculus students. *In theory, research and practice in mathematical education: Working group reports and collected papers*. Nottingham: University of Nottingham.
- Mundy, J. F. dan Lauten, D. 1994. Learning about calculus. *The mathematics teacher*, 87 (2), hal. 115-120.
- National Research Council. 1989. *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington D.C.: National Academy Press.
- O'Shea, T. 1993. An activity-based approach to the cosine law. *School science and mathematics*, 93 (2), hal. 71-75.
- Pool, R. 1992. Mathematicians joint the computer revolution. *Science*, 256, hal. 52-53.
- Presmeg, N. C. 1986. Visualisation in high school mathematics. *For the learning of mathematics*, 6 (3), 42-46.
- Presmeg, N.C. 1992. *The role of visually mediated process in mathematics*. Tidak Diterbitkan.
- Rif'at, M. 1997. *Analisis tingkat deduksi dan rogoritas susunan bukti mahasiswa jurusan pendidikan matematika IKIP Malang*. (Tesis). Malang: PPS IKIP Malang.
- Ruseffendi, E. T. 1991. *Pengantar kepada membantu guru mengembangkan kompetensinya dalam pengajaran matematika untuk meningkatkan CBSA*. Bandung: Tarsito.
- Ruseffendi, E. T. 1994. *Dasar-dasar penelitian pendidikan dan bidang non-eksakta lainnya*. Semarang: IKIP Semarang Press.
- Schoenfeld, A. H. 1985. *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (Ed.). 1994. *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, New Jersey: LEA.
- Seng, L. C. 1979. Strategi-strategi untuk pengajaran konsep-konsep matematik. *Jurnal pendidik dan pendidikan*, 1 (1), hal. 42-53.
- Simon, H. A. 1979. Information processing models of cognition. *Annual review of psychology*, 30, hal. 363-396.
- Sprenst, B. 1991. *Metode statistik nonparametrik*. Terjemahan Erwin R. Osman. 1991. Jakarta: UI Press.
- Steen, L.A. 1988. The science of patterns. *Science*, 240, hal. 611-616.
- Steen, L.A. 1990. Pattern. Dalam L.A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approach to nemeracy*, hal. 1-10. Washington DC: National Academy Press.
- Stockton, J. R. dan Clark, C. T. 1980. *Introduction to business and economic statistics*. Cincinnati, Ohio: South Western Publishing Co.
- Sudjana. 1986. *Metoda statistika* (Edisi ke IV). Bandung: Tarsito.
- Sumarmo, U. 1987. *Kemampuan pemahaman dan penalaran matematika siswa SMA dikaitkan dengan kemampuan penalaran logik siswa dan beberapa unsur proses belajar mengajar*. (Disertasi). Bandung: FPS IKIP Bandung.
- Susanna, S. 1994. The role of proof in problem solving. Dalam Alan H. Schoenfeld (Ed.),

- Mathematical thinking and problem solving*. New Jersey: LEA.
- Susanna, S. 1994. The role of proof in problem solving. Dalam Alan H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*. New Jersey: LEA.
- Suwarsono, St. 1998. Peranan strategi visual dalam pembelajaran matematika. Makalah disajikan dalam *Seminar nasional pendidikan matematika dalam era globalisasi*, Program Pasca Sarjana IKIP Malang, Malang, 4 April 1998.
- Suwarsono, St. 1998. Peranan strategi visual dalam pembelajaran matematika. Makalah disajikan dalam *Seminar nasional pendidikan matematika dalam era globalisasi*, Program Pasca Sarjana IKIP Malang, Malang, 4 April 1998.
- Syer, H. W. 1953. Sensory learning applied to mathematics. Dalam Suwarsono, *Peranan strategi visual dalam pembelajaran matematika*. Makalah *Seminar*, tidak diterbitkan.
- Tadao, N. 2000. The constructive approach in mathematics education. Makalah disajikan dalam *The 24 th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Hiroshima, 23-27 Juli 2000.
- Tall, D. 1992. The transition to advanced mathematical thinking: function, limits, infinity, and proof. Dalam Douglas A. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. USA: Macmillan.
- Tsamir, P. dan Mandel, N. 2000. The intuitive rule same A-same B: the case of area and perimeter. Makalah disajikan dalam *The 24 th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Hiroshima, Juli.
- Warren, E. 2000. Visualization and the development of early understanding in algebra. Makalah disajikan dalam *The 24 th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Hiroshima, 23-27 Juli 2000. disajikan dalam *The 24 th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Hiroshima, 23-27 Juli 2000.
- Wilson, P. S. (Ed.). 1993. *Research ideas for the classroom high school mathematics*. New York: Macmillan Publishing Company.